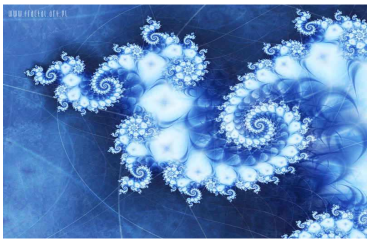
Introducción

Se presentan en este trabajo, las técnicas y procedimientos necesarios para el aprendizaje del cálculo de derivadas, a través de multitud de ejemplos y ejercicios con soluciones. No pretende ser un tratado formal del cálculo diferencial. El objetivo es que el lector llegue a ser capaz de calcular cualquier tipo de derivada, utilizando las técnicas expuestas, y superar la dificultad de reducir el resultado a una expresión elegante, autentico caballo de batalla en el aprendizaje del cálculo de derivadas.

El nivel alcanzable con ayuda de este texto seria el correspondiente a estudios superiores científico-técnicos, Las destrezas aprendidas serían aplicables al cálculo diferencial avanzado. No obstante, para facilitar el estudio de este texto en diferentes niveles educativos, se han clasificado los ejercicios en dos niveles de dificultad, correspondientes a estudios de nivel medio y superior. En este sentido, se diferencian los ejercicios de dificultad más alta con un asterisco **(*)** en su enunciado.

Contenido



1 Conceptos básicos

1.1 Definición de derivada

1.1.1 Derivada de una función

Derivada de una función $f(x)$, se define como el valor del límite siguiente:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $f(x)=3x^2$
Solución:

$$f'(x)=\frac{d(3x^2)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}=$$

Desarrollando el binomio $(x+h)^2$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6x+3h)$$

Finalmente, al aplicar el límite

$$\boxed{f'(x)=6x}$$

1.1.2 Derivada de una función en un punto

Derivada de una función $f(x)$ en un punto $x_0=a$, se define como el valor del límite siguiente:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $f(x)=2x^2+5$ en el punto $x=3$
Solución:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2\cdot(3+h)^2+5)-(2\cdot 3^2+5)}{h}=$$

Desarrollando el binomio $(3+h)^2$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2\cdot(9+6h+h^2)+5)-(18+5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(12+2h)}{h}=\lim_{h\to 0}(12+2h)$$

Finalmente

$$\boxed{f'(3)=12}$$

1.1.3 Interpretación geométrica de la derivada

En esta secciona vamos a dar una interpretación de la derivada observando el comportamiento de la expresión que define la derivada en el plano XY. Analicemos el cociente que aparece en el límite de la definición de derivada:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

En la siguiente figura tenemos una representación grafica, sobre el plano, de los elementos que componen este cociente.

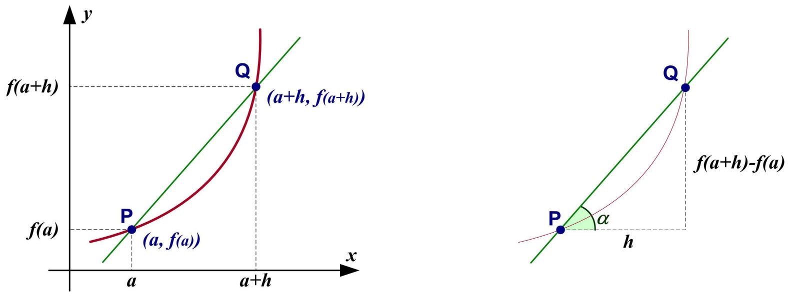


Fig. 1 Interpretación geométrica de la derivada

Como podemos observar en el triangulo de la derecha, la recta secante PQ tiene un pendiente, $\operatorname{tg}\alpha$, que podemos calcular:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Y que coincide con el cociente mencionado de la definición de derivada.
Conforme h tiende a 0, observamos que el punto Q se va acercando al punto P

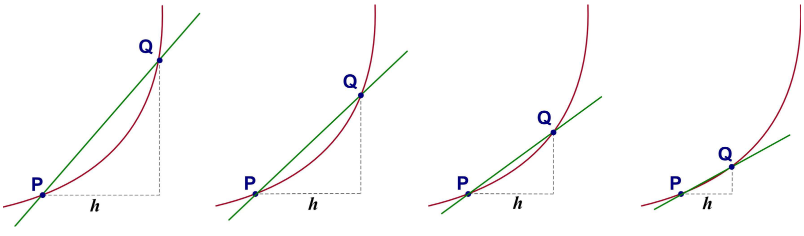


Fig. 2 Cuando h tiende a 0, Q se acerca a P

En el limite, el punto Q coincide con P, y la recta PQ ya no corta a la curva en dos puntos, sino que solo toca a la función en un punto, el punto P=Q, es decir, deja de ser secarte para ser una recta tangente a la curva en el punto P. Es decir:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \operatorname{tg}\alpha$$

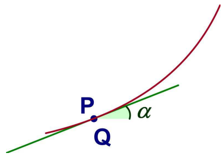


Fig. 3 En el límite Q coincide con P

La derivada de una función f en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

1.3 Demostración de algunas fórmulas de derivación

A continuación se demuestran las principales fórmulas de derivación de funciones usuales. Algunas de estas fórmulas se determinan aplicando la definición de la derivada. Otras se demostrarán utilizando resultados de fórmulas o reglas ya demostradas.

1.1.1 Función Identidad

$$\boldsymbol{y = x}$$

La aplicación de la derivada a esta función no tiene dificultad:

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 \qquad \boxed{y' = 1}$$

1.1.2 Función Potencial

$$\boldsymbol{y = x^n}$$

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Aplicando el desarrollo del Binomio de Newton a $(x+h)^n$ tenemos:

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x\ h^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h}$$

Podemos simplificar $\binom{n}{0}x^n - x^n = 0$

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x\ h^{n-1} + \binom{n}{n}h^n}{h}$$

Observemos que h está como factor en todos los términos de numerador.
Extraemos el factor común:

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n-1}x\ h^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1}\right]}{h}$$

Que se simplifica con el denominador

$$y' = \lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n-1}x\ h^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1}\right]$$

Al aplicar el límite, el único término que no se hace 0 es $\binom{n}{1}x^{n-1}$. Por tanto:

$$\boxed{y' = n\cdot x^{n-1}}$$

1.1.3 Función Potencial Compuesta

$\boldsymbol{y = u^n}$ Siendo $u = g(x)$

Aplicando la regla de la cadena:

- $y = f(u) = u^n \qquad \dfrac{dy}{du} = n \cdot u^{n-1}$
- $u = g(x) \qquad \dfrac{du}{dx} = g'(x) = u'$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n \cdot u^{n-1} \cdot u'}$$

1.1.4 Función Racional

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$$

Este ejemplo, lo calcularemos de dos formas diferentes para ilustrar el uso de las reglas y fórmulas de derivación.. Primero, utilizaremos la definición de derivada, y como segundo método obtendremos la misma solución empleando las fórmulas y reglas de derivación obtenidas en las paginas anteriores. Con esto, se pretende demostrar que, a menudo, existen varios caminos para llegar a obtener la misma derivada. La experiencia nos ayudará a elegir el método más eficiente.

Método 1:
Aplicamos la definición de la derivada.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{h \cdot x \cdot (x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h \cdot x \cdot (x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x^2 + xh}$$

Aplicando el límite

$$\boxed{y' = -\frac{1}{x^2}}$$

Método 2:
Aplicamos la regla de derivación del cociente.

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Con $f(x) = 1$ y $g(x) = x$, y sabiendo que $f'(x) = 0$ y $g'(x) = 1$, tenemos:

$$y' = \frac{x \cdot 0 - 1 \cdot 1}{x^2}$$

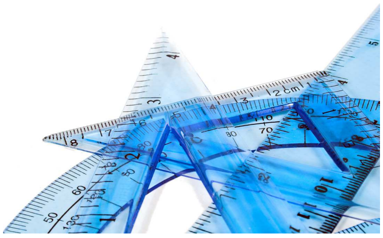
Simplificando:

$$\boxed{y' = -\frac{1}{x^2}}$$

1.4 Tabla de derivadas.

A continuación se resumen las reglas y fórmulas de derivación, demostradas en el apartado anterior. La tabla se amplia con algunas fórmulas usuales no demostradas.

Reglas de derivación			
$y = K$	$y' = 0$	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f(x) + g(x)$	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$
$y = K \cdot f(x)$	$y' = K \cdot f'(x)$	$y = f \circ g(x) = f\left(u\right)$	$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$
Fórmulas de derivación			
Función simple		**Función compuesta**	
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$	$y = \dfrac{1}{u}$	$y' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = u' \cdot e^u$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^u$	$y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$y = x^x$	$y' = x^x\left(1 + \ln x\right)$	$y = u^v$	$y' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot v \cdot u'$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u' \cdot \cos u$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$y = arc \operatorname{sen} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = arc \operatorname{sen} u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = arc \cos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = arc \cos u$	$y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = arc \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$y = arc \operatorname{tg} f(x)$	$y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$



2 Ejercicios resueltos

2.1 Lista de ejercicios resueltos

Se listan a continuación todos los ejercicios resueltos en las paginas siguientes, agrupados por diferentes técnicas de derivación que se explican en la sección correspondiente. Inténtese resolver antes de mirar la solución.

Calcular la derivada aplicando la definición

1. $y = x^3$

2. $y = x^2 + 2x + 3$

3. $y = \dfrac{1}{x}$

4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5. $y = \sqrt{x^2 - 5}$

6. $y = \cos x$

Calcular la derivada aplicando las fórmulas y reglas de derivación

7. $y = 3x^3$

8. $y = x^4 + 3x^2 - 6$

9. $y = 6x^3 - x^2$

10. $y = \dfrac{x^5}{a+b} - \dfrac{x^2}{a-b} - x$

11. $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{5}$

12. $y = 2ax^3 - \dfrac{x^2}{b} + c$

13. $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x$

14. $y = \dfrac{x}{m} + \dfrac{m}{x} + \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{n^2}{x^2}$

15. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$

16. $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5$

17. $y = \dfrac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{b}{x\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

18. $y = \left(x^2 + 2\right)\left(x + 1\right)$

19. $y = \left(1 + 4x^3\right)\left(1 + 2x^2\right)$

20. $y = x\left(2x - 1\right)\left(3x + 2\right)$

21. $y = \left(2x - 1\right)\left(x^2 - 6x + 3\right)$

22. $y = \dfrac{\left(3x + 2\right)}{\left(2x + 1\right)}$

23. $y = \dfrac{2x^4}{b^2 - x^2}$

24. $y = \dfrac{a - x}{a + x}$

25. $y = \dfrac{t^3}{1 + t^2}$

26. $y = \dfrac{\left(s + 4\right)^2}{s + 3}$

27. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$

28. $y = \dfrac{x^p}{x^m - a^m}$

29. $y = \left(2x + 3\right)^3$

30. $y = \left(2x^2 - 3\right)^2$

31. $y = \left(x^2 + 3x - 5\right)^2$

32. $y = \left(x^2 + a^2\right)^5$

33. $y = \sqrt{x^2 + a^2}$

34. $y = \left(a + x\right)\sqrt{a - x}$

35. $y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

36. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1 + x^2}}$

37. $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$

38. $y = \operatorname{sen}^2 x$

39. $y = \cos 3x$

40. $y = 2\operatorname{sen} x + \cos 3x$

41. $y = \operatorname{tg}\left(ax + b\right)$

42. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

43. $y = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 3x$

44. $y = \operatorname{cotg}^2 5x$

45. $y = t \operatorname{sen} t + \cos t$

46. $y = \operatorname{sen}^3 t \cdot \cos t$

47. $y = a\sqrt{\cos 2x}$

Derivación de funciones implícitas

121. $y^2 = 4px$

122. $x^2 + y^2 = a^2$

123. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

124. $y^3 - 3y + 2ax = 0$

125. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

126. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

127. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$

128. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

129. $y = \cos(x + y)$

130. $\cos(xy) = x$

Derivación de funciones inversas

131. $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{a}$

132. $y = (\operatorname{arcsen} x)^2$

133. $y = \operatorname{arctg}(x^2 + 1)$

134. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1 - x^2}$

135. $y = \arccos x^2$

136. $y = \arccos(\ln x)$

137. $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$

138. $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{\operatorname{sen} x}$

139. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{3 + 5\cos x}$

Derivación logarítmica

140. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$

141. $y = \dfrac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

142. $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3 (x+3)^4}$

143. $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3 \sqrt[3]{(x-3)^7}}}$

144. $y = \dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{(1-x^2)}}$

145. $y = x^5 (a+3x)^3 (a-2x)^2$

146. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$

147. $y = x^{\operatorname{arcsen} x}$

Derivación de funciones paramétricas

148. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases}$

149. $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

150. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$

151. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$

2.3 Hallar la derivada aplicando las fórmulas y reglas de derivación

7. $\boldsymbol{y = 3x^3}$

Solución:

Vemos que la función es el producto de una constante por un función, es decir: $y = K \cdot f(x)$ con $K = 3$ y $f(x) = x^3$.

Por lo tanto:

$$y' = K \cdot f'(x) = 3f'(x)$$

Calcularemos $f'(x)$ aplicando la fórmula de derivación de la función potencial

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

y obtenemos

$$f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Finalmente:

$$y' = 3 \cdot 3x^2$$

$$\boxed{y' = 9x^2}$$

8. $\boldsymbol{y = x^4 + 3x^2 - 6}$

Solución:

Vemos que la función está compuesta de la suma de tres funciones

$$f(x) = x^4 \qquad g(x) = 3x^2 \qquad h(x) = -6$$

Aplicando la regla de derivación de la suma de funciones, la derivada de la función será de la forma:

$$y' = f'(x) + g'(x) + h'(x)$$

Veamos las derivadas de cada una de ellas.

Con $f(x) = x^4$, aplicamos la fórmula de derivación $y' = n \cdot x^{n-1}$, entonces

$$f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$$

Observemos que la función $g(x) = 3x^2$ es similar al ejercicio anterior. Se obtiene:

$$g'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} = 6x$$

La función $h(x) = -6$ es una constante, por lo tanto:

$$h'(x) = 0$$

Entonces, la derivada de la función completa será:

$$\boxed{y' = 4x^3 + 6x}$$

9. $y = 6x^3 - x^2$

Solución:

Vemos que esta función es polinómicas, del estilo de las anteriores. Aplicamos la fórmula de derivación de la función potencial a cada término.

$$y' = 6 \cdot 3x^{3-1} - 3x^{2-1}$$

$$\boxed{y' = 18x^2 - 2x}$$

10. $y = \dfrac{x^5}{a+b} - \dfrac{x^2}{a-b} - x$

Solución:

Pongamos la función de la siguiente manera:

- $y = \dfrac{1}{a+b}x^5 - \dfrac{1}{a-b}x^2 - x^1$

Los factores $\dfrac{1}{a+b}$ y $\dfrac{1}{a-b}$ son constantes que multiplican a un potencial de x. Cada potencial se deriva como en los ejercicios anteriores.

$$y' = \frac{1}{a+b}5x^{5-1} - \frac{1}{a-b}2x^{2-1} - 1x^{1-1}$$

$$\boxed{y' = \frac{5x^4}{a+b} - \frac{2x}{a-b} - 1}$$

11. $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{5}$

Solución:

Vemos que la función que se pide es el producto de una constante por una expresión polinómica: $y = \dfrac{1}{5}(x^3 - x^2 + 1)$

El polinomio se deriva como en ejercicios anteriores, utilizando la propiedad de la derivada de la suma de funciones en combinación con la derivada de la función potencial:

$$y' = \frac{1}{5}(3x^{3-1} - 2x^{2-1} + 0)$$

$$\boxed{y' = \frac{3x^2 - 2x}{5}}$$

12. $y = 2ax^3 - \dfrac{x^2}{b} + c$

Solución:

Los símbolos a, b y c representan constantes: Nuevamente tenemos una expresión polinómica que podemos escribir de la siguiente forma: